Hyperbolische Funktionen

Sinus hyperbolicus
Kosinus hyperbolicus
Tangens hyperbolicus

u. a.

Text Nr. 51[illegible]

Stand: [illegible]. Juni 2021

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die sogenannten *hyperbolischen Funktionen* werden an Gymnasien in der Regel nicht (mehr) gezielt unterrichtet. Dabei sind sie lediglich spezielle Exponentialfunktionen und kommen in dieser Eigenschaft ohne Nennung ihrer spezifischen Namen durchaus vor.

Was sie so interessant macht, ist ihre Verwandtschaft mit den trigonometrischen Funktionen.
So gibt es diese Funktionen

hyperbolisch		**trigonometrisch**	
$y = \sinh(x)$	*Sinus hyperbolicus*	$y = \sin(x)$	*Sinus*
$y = \cosh(x)$	…	$y = \cos(x)$	Kosinus
$y = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$		$y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	Tangens
$y = \coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$		$y = \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$	Kotangens
$y = \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$		$y = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$	Sekans
$y = \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$		$y = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$	Kosekans

Die Funktionen Kotangens, Sekans und Kosekans werden seltener verwendet.

In diesem Text werden die hyperbolischen Funktionen eingeführt und beschrieben.

Dazu gibt es den Tabellentext [illegible] mit zwei großen Übersichten.

Inhalt

1 sinh und cosh

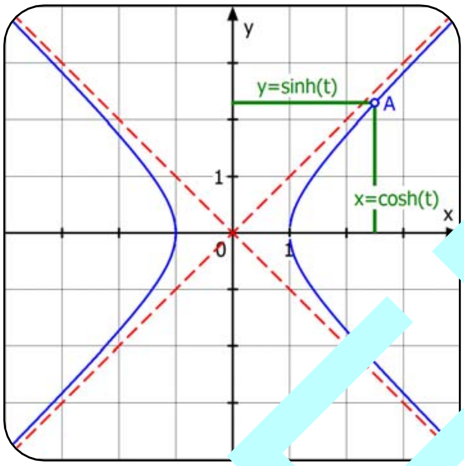
Die Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens nennt man auch **Kreisfunktionen**, weil sie Beziehungen zur Kreisgleichung aufweisen. Daneben gibt es die **hyperbolischen Funktionen,** die eine ähnliche Beziehung zu einer Hyperbelgleichung aufweisen.

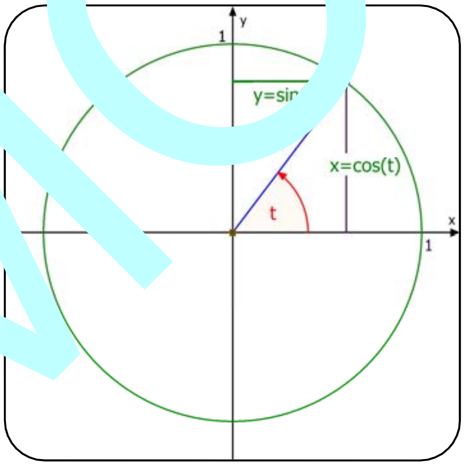
Definition 1 $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Man spricht sinh so aus „Sinus hyperbolicus“ und entsprechend „Kosinus hyperbolicus“.

Hyperbolische Funktionen ***Vergleich*** **Kreisfunktionen**

Zusammenhang mit einer Hyperbel **bzw. einem Kreis.**





A sei der Punkt $A(\cosh(t)\,|\,\sinh(t))$
Auf welcher Ortskurve liegt A?

A sei der Punkt $A(\cos(t)\,|\,\sin(t))$
Auf welcher Ortskurve liegt A?

Man rechnet:

$$x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \sin^2(t) = \frac{\left(e^t + e^{-t}\right)^2 - \left(e^t - e^{-t}\right)^2}{4}$$

$$= \frac{\left(e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}\right) - \left(e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}\right)}{4}$$

$$= \frac{\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}\right) - \left(e^{2t} - 2 + e^{-2t}\right)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Also liegt A auf der Kurve mit der Gleichung

$$x^2 - y^2 = 1$$

Sie heißt Hyperbel.

Also liegt A auf der Kurve mit

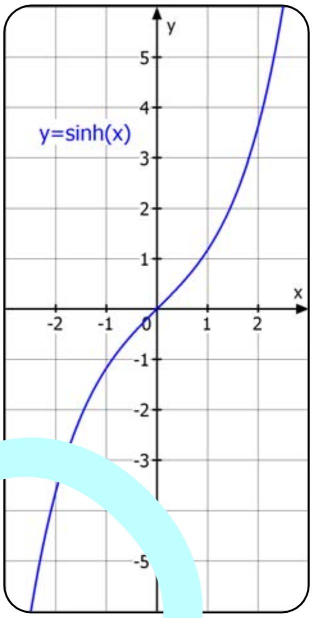
$$x^2 + y^2 = 1$$

Sie ist ein Kreis.

Man merke sich diese Beziehungen:

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ und $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Eigenschaften der Funktion sinh:



Symmetrie: Die sinh-Kurve ist punktsymmetrisch zum Ursprung:

denn: $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$

Ableitung: $\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x} - e^{-x}\right)$

$\sinh'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x} + e^{-x}\right)$

$\sinh'(x) = \cosh(x)$

Monotonie und Wertmenge:

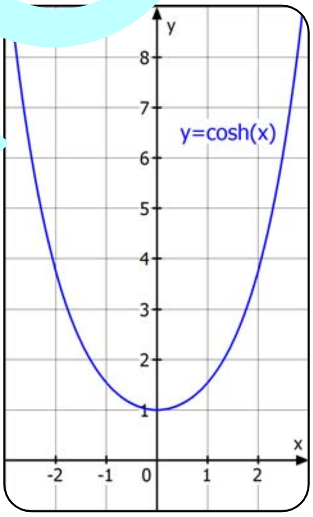
sinh ist stetig in $\mathbb{R}$ und es gilt $\sinh'(x) > 0$,

also wächst sinh streng monoton: $\mathbf{W} = \mathbb{R}$

Stammfunktion: $\int \sinh(x)dx = \frac{1}{2}\int\left(e^{x} - e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x} + e^{-x}\right) + C$

$\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + C$

Eigenschaften der Funktion cosh:



Symmetrie: Die cosh-Kurve ist symmetrisch zur y-Achse:

denn: $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh(x)$

Ableitung: $\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x} + e^{-x}\right)$

$\cosh'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x} - e^{-x}\right)$

$\cosh'(x) = \sinh(x)$

Monotonie und Wertmenge:

cosh ist stetig in $\mathbb{R}$.

Für x > 0 gilt $\cosh'(x) > 0$, für x < 0: $\cosh'(x) < 0$
also fällt cosh für x < 0 und steigt für x > 0. Das Minimum ist

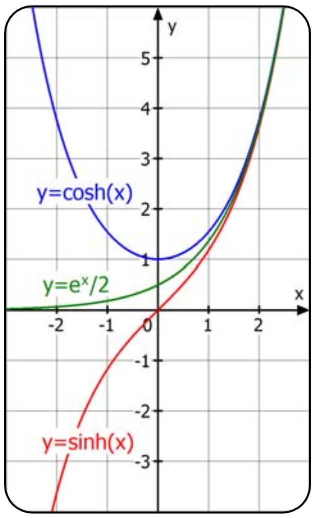
$\cosh(0) = \frac{e^{0} + e^{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$,

Wertmenge: $\mathbf{W} = [\,1; \infty\,[$.

Stammfunktion: $\int \cosh(x)dx = \frac{1}{2}\int\left(e^{x} + e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x} - e^{-x}\right) + C$

$\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + C$

Näherungskurven für $x \to \infty$:



Für $x \to \infty$ ist bekanntlich $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$:

Also gilt für große x: $\sinh(x) \approx \frac{e^{x}}{2}$ und analog $\cosh(x) \approx \frac{e^{x}}{2}$

Man erkennt dies gut in folgender Abbildung: